

## Praktikum № 9: Aplikácie určitého integrálu

**Cieľ:** Znázorniť elementárnu rovinnú oblasť, vypočítať obsah časti roviny, objem a povrch rotačného telesa, dĺžku rovinnej krivky.

**Zadanie 1:** Obsah elementárnej rovinnej oblasti

**Zadanie 2:** Objem rotačného telesa

**Zadanie 3:** Povrch rotačnej plochy

**Zadanie 4:** Dĺžka rovinnej krivky

**Metodický postup:**

- ✓ `Clear[f, g, ....]` ..... vymazanie hodnoty f, g, .....
- ✓ `f[x_]:=výraz` .....definovanie funkcie f jednej premennej x
- ✓ `Plot[{f[x], g[x]}, {x, c, d}]` .....vytvorí grafy funkcií f(x), g(x) do jedného obrázku
- ✓ `Solve[f[x]==g[x], x]` .....riešenie rovnice pre neznámu x, alebo určenie súradníc priesečníkov grafov
- ✓ `FindRoot[f[x]==g[x], {x, x0}]` .....numerické riešenie rovnice s počiatočnou iteráciou  $x=x_0$ , alebo určenie súradníc priesečníkov grafov, ak rovnica  $f(x)=g(x)$  nie je algebraická
- ✓ `FilledPlot[{f1, f2, ...}, {x, xmin, xmax}]` .....vyplní rôznymi farbami časť roviny medzi susednými krivkami
- ✓ `D[f, x]` .....parciálna derivácia  $\frac{\partial f}{\partial x}$
- ✓ `Integrate[f, {x, xmin, xmax}]` .....určitý integrál  $\int_{x_{\min}}^{x_{\max}} f(x) dx$  f v hraniciach
- ✓ `NIntegrate[f, {x, xmin, xmax}]` .....numerická aproximácia určitého integrálu

Riešenie:

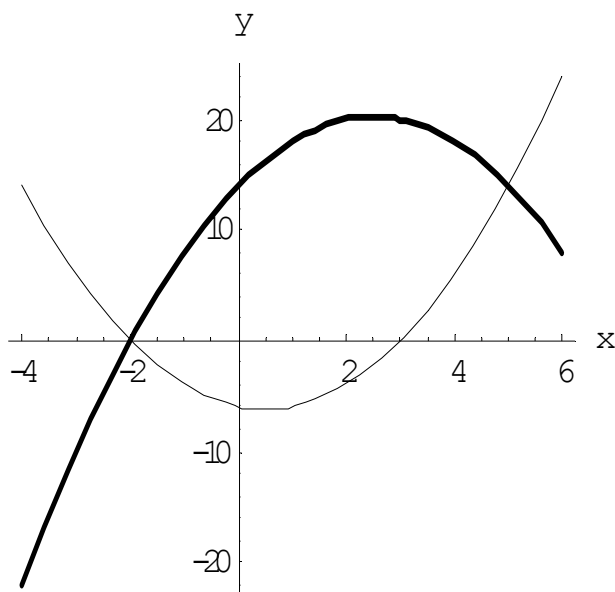
Zadanie 1: Vypočítajte obsah časti roviny, ktorá je ohraničená grafmi funkcií  $f: y = -x^2 + 5x + 14$   
 $g: y = x^2 - x - 6$ .

**In[1]:=** Clear[f, g]

**In[2]:=** f[x\_] := -x<sup>2</sup> + 5 x + 14

**In[3]:=** g[x\_] := x<sup>2</sup> - x - 6

**In[4]:=** Plot[{f[x], g[x]}, {x, -4, 6}, PlotStyle → {{Thickness[0.01]},  
 {Thickness[0.005]}}, AxesLabel → {"x", "y"}]



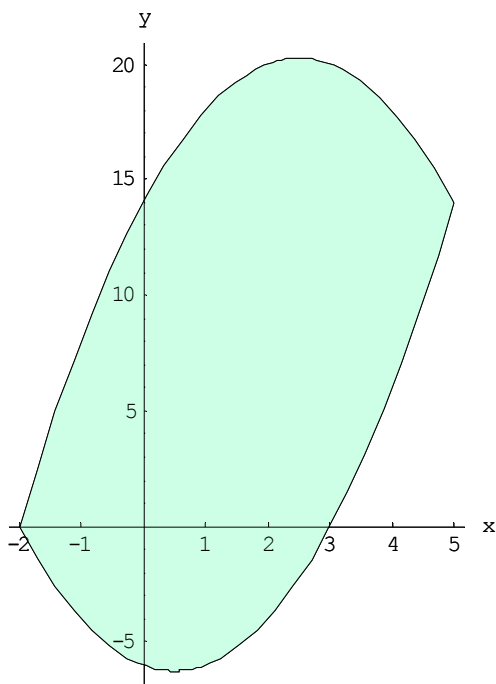
Out[4]= - Graphics -

**In[5]:=** Solve[f[x] == g[x], x]

Out[5]= {{x → -2}, {x → 5}}

**In[6]:=** << Graphics`FilledPlot`

```
In[7]:= FilledPlot[{-x2 + 5 x + 14, x2 - x - 6}, {x, -2, 5},
  Fills→ RGBColor[0.8, 1, 0.9],
  Ticks→ {{-3, -2, -1, 1, 2, 3, 4, 5, 6}, Automatic}, AspectRatio→ 1.4 ,
  AxesLabel→ {"x", "y"}]
```



Out[7]= - Graphics -

```
In[8]:= P = ∫-25 (f[x] - g[x]) dx
```

Out[8]=  $\frac{343}{3}$

```
In[9]:= P // N
```

Out[9]= 114.333

Obsah časti roviny je 114.333 ( $j^2$ ).

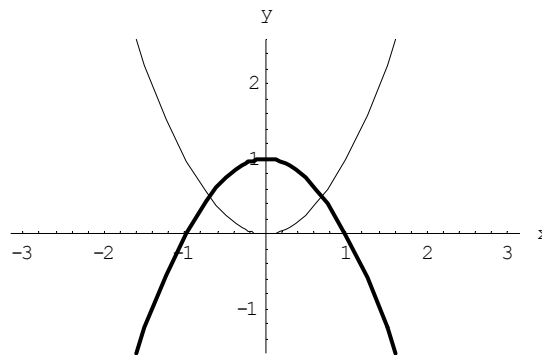
Zadanie 2: Vypočítajte objem telesa, ktoré vznikne rotáciou časti roviny ohraničenej grafmi funkcií:  $f: y = 1 - x^2$ ,  
 $g: y = x^2$ , okolo osi  $x$ .

```
In[10]:=Clear[f, g]
```

```
In[11]:=f[x_] := 1 - x^2
```

```
In[12]:=g[x_] := x^2
```

```
In[13]:= Plot[{f[x], g[x]}, {x, -3, 3},
  PlotStyle -> {{Thickness[0.01]}, {Thickness[0.005]}},
  AxesLabel -> {"x", "y"}]
```



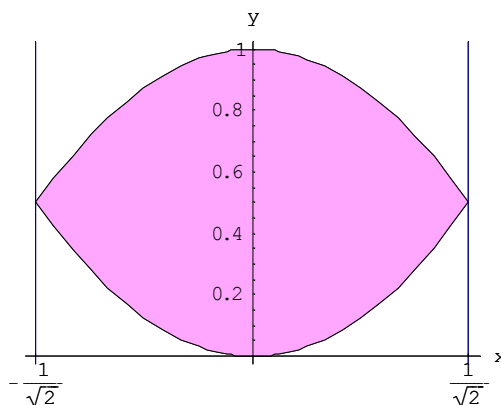
```
Out[13]= - Graphics -
```

```
In[14]:= Solve[f[x] == g[x], x]
```

```
Out[14]= {{x -> -1/Sqrt[2]}, {x -> 1/Sqrt[2]}}
```

```
In[15]:=
```

```
FilledPlot[{f[x], g[x]}, {x, -1/Sqrt[2], 1/Sqrt[2]}, Ticks -> {{-2, -1/Sqrt[2], 1/Sqrt[2], 2, 3},
  Automatic}, Fills -> RGBColor[1., 0.65, 1.], AspectRatio -> Automatic,
  AxesLabel -> {"x", "y"}, GridLines -> {{-1/Sqrt[2], 1/Sqrt[2]}, {}]}
```



```
Out[15]= - Graphics -
```

$$\text{In[16]:= } V = \pi \int_{\frac{-1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} ((1 - x^2)^2 - (x^2)^2) dx$$

$$\text{Out[16]= } \frac{2\sqrt{2}\pi}{3}$$

$$\text{In[17]:= } V // N$$

$$\text{Out[17]= } 2.96192$$

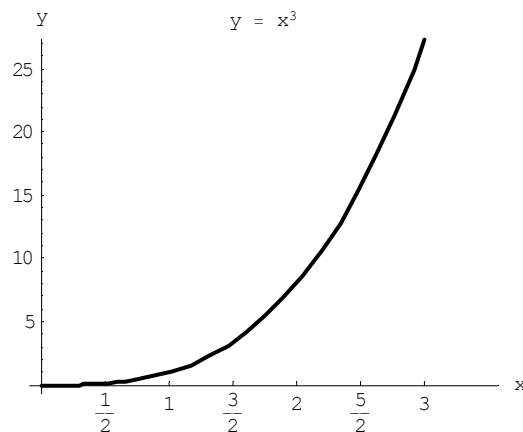
Objem rotačného telesa je  $V = 2.96192$  ( $j^3$ ).

Zadanie 3: Vypočítajte povrch rotačnej plochy, ktorá vznikne rotáciou grafu funkcie  $f: y = x^3$ , ak  $x \in \langle 0, 3 \rangle$  okolo osi  $x$ .

$$\text{In[18]:= } \text{Clear}[f]$$

$$\text{In[19]:= } f[x_] := x^3$$

$$\begin{aligned} \text{In[20]:= } & \text{Plot}[f[x], \{x, 0, 3.5\}, \text{PlotStyle} \rightarrow \{\text{Thickness}[0.01]\}, \\ & \text{Ticks} \rightarrow \left\{\left\{0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}, 3\right\}, \text{Automatic}\right\}, \text{AspectRatio} \rightarrow 0.75, \\ & \text{AxesLabel} \rightarrow \{ "x", "y" \}, \text{PlotLabel} \rightarrow "y = x^3" \end{aligned}$$



$$\text{Out[20]= } \text{- Graphics -}$$

$$\text{In[21]:= } \text{derf} = D[f[x], x]$$

$$\text{Out[21]= } 3x^2$$

**In[22]:=**  $S = 2 \pi \int_0^3 x^3 \sqrt{1 + (3x^2)^2} dx$

**Out[22]=**  $2 \left( -\frac{1}{54} + \frac{365 \sqrt{730}}{27} \right) \pi$

**In[23]:=**  $S // N$

**Out[23]=** 2294.82

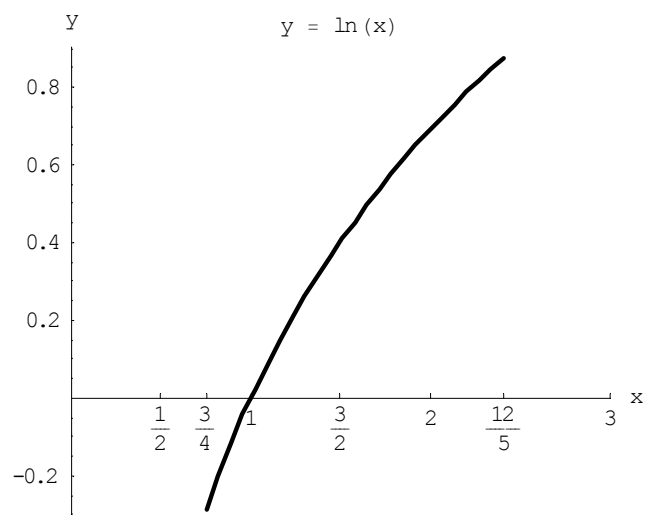
**Povrch rotačnej plochy je 2294.82 (j<sup>2</sup>).**

**Zadanie 4:** Vypočítajte dĺžku grafu funkcie  $f: y = \ln x$  pre  $x \in \left\langle \frac{3}{4}, \frac{12}{5} \right\rangle$ .

**In[24]:=** `Clear[f]`

**In[25]:=** `f[x_] := Log[x]`

**In[26]:=** `Plot[f[x], {x, 3/4, 12/5}, PlotStyle -> {Thickness[0.00825]},  
Ticks -> {{1/2, 3/4, 1, 3/2, 2, 12/5, 3}, Automatic}, AspectRatio -> 0.875,  
PlotRange -> {{0, 3}, Automatic}, AxesLabel -> {"x", "y"},  
PlotLabel -> "y = ln(x)"]`



**Out[26]=** - Graphics -

In[27]:= **derf** = D[f[x], x]

Out[27]=  $\frac{1}{x}$

In[28]:= **1** =  $\int_{\frac{3}{4}}^{\frac{12}{5}} \sqrt{1 + \left(\frac{1}{x}\right)^2} dx$

Out[28]=  $\frac{1}{20} \left( 27 + 20 \operatorname{Log}\left[\frac{4}{3}\right] + 20 \operatorname{Log}\left[\frac{9}{4}\right] + 20 \operatorname{Log}\left[\frac{12}{5}\right] - 20 \operatorname{Log}\left[\frac{18}{5}\right] \right)$

In[29]:= **1** // **N**

Out[29]= 2.04315

**Dĺžka grafu funkcie  $y = \ln x$  pre  $x \in \left\langle \frac{3}{4}, \frac{12}{5} \right\rangle$  je 2.04315 (j).**

**Zadanie 5: Úlohy na riešenie**

- Vypočítajte obsah časti roviny, ktorá je ohraničená grafmi funkcií  $f: y = \frac{x^2}{4}$ ,  $g: y = \frac{x}{2} + 2$ .<sup>28</sup>
- Vypočítajte objem telesa ktoré vznikne rotáciou okolo osi x časti roviny ohraničenej grafmi funkcií:  $f: y = \frac{2x}{\pi}$ ,  $g: y = \sin x$ .<sup>29</sup>
- Odvoďte vzorec pre obsah guľového vrchlíka.<sup>30</sup>
- Vypočítajte dĺžku grafu funkcie  $f: y = x^2$ , pre  $x \in \langle 0, 3 \rangle$ .

**Využitie vo výučbe matematiky SŠ: určitý integrál, použitie určitého integrálu, v predmete matematické metódy**

**Zdrojový súbor na CD-R:**

[Praktikum-09.nb](#)

<sup>28</sup> Por. RIEČAN B., FRANEK M., ČERVENKOVÁ O., *Úlohy z matematiky pre 3. ročník gymnázia*, SPN Bratislava 1977, s. 237.

<sup>29</sup> Por. Tamže, s. 240.

<sup>30</sup> Por. Tamže, s. 240.