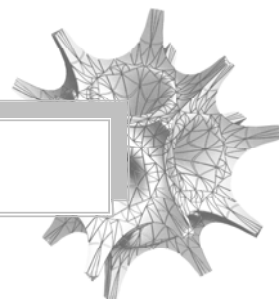


Praktikum № 7: **Lineárne optimalizačné úlohy**



Cieľ: Graficky znázorniť množinu prípustných riešení, zobrazíť účelovú funkciu, nájsť optimálne riešenie a interpretovať riešenie danej úlohy.

Metodický postup:

- ✓ `InequalityPlot[ineqs, {x, xmin, xmax}, {y, ymin, ymax}]` grafické riešenie systému nerovníc
- ✓ `ConstrainedMin[f, {inequalities}, {x,y, ...}]` určenie minimálnej, resp.
- ✓ `ConstrainedMax[f, {inequalities}, {x,y, ...}]` maximálnej hodnoty funkcie v danej sústave nerovníc

Vzhľadom na rozsiahlosť úloh lineárnej optimalizácie forma uvedenia príkladov je zadanie a následne riešenie.

Zadanie 1: V stolárskej dielni vyrábajú stoly a nočné stolíky. Na ich výrobu potrebujú dva druhy dreva. Na výrobu stola potrebujú $0,2 \text{ m}^3$ dreva prvého druhu a $0,1 \text{ m}^3$ dreva druhého druhu. Na výrobu nočného stolíka potrebujú $0,04 \text{ m}^3$ dreva prvého druhu a $0,06 \text{ m}^3$ dreva druhého druhu. Na sklade majú 80 m^3 dreva prvého druhu a 60 m^3 dreva druhého druhu. Z predaja jedného stola získajú 100,- Sk čistého zisku. Z predaja jedného nočného stolíka získajú 25,- Sk čistého zisku.

Koľko stolov a nočných stolíkov z uvedenej zásoby dreva môžu vyhotoviť tak, aby dosiahli čo najväčší zisk ?

Riešenie: Podmienky úlohy vyjadríme do tabuľky:

VÝROBOK	SPOTREBA DREVA (m ³)	
	prvý druh	druhý druh
Stôl	0,2	0,1
Nočný stolík	0,04	0,06
Zásoba dreva	80	60

Označme: x ... počet vyrobených stolov
 y ... počet vyrobených nočných stolíkov

podmienky úlohy môžeme vyjadriť sústavou lineárnych nerovníc:

$$0,2x + 0,04y \leq 80$$

$$0,1x + 0,06y \leq 60$$

$$x \geq 0$$

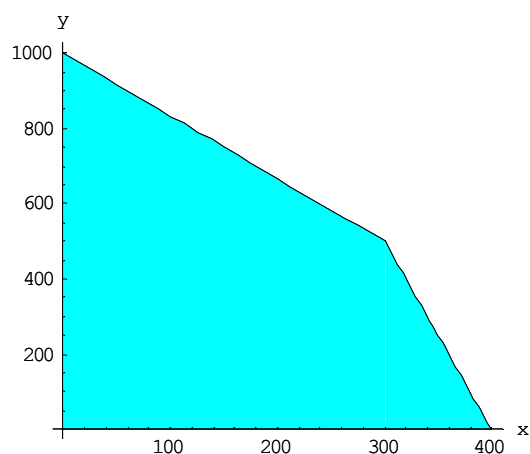
$$y \geq 0$$

Celkovú trhovú produkciu môžeme vyjadriť účelovou funkciou:

$$Z = 100x + 25y, \text{ ktorú treba maximalizovať.}$$

In[1]:= <<Graphics`InequalityGraphics`

In[2]:= `InequalityPlot[ 0.2 x + 0.04 y ≤ 80 ∧ 0.1 x + 0.06 y ≤ 60 ∧ x ≥ 0 ∧ y ≥ 0,`
`{x, 0, 500}, {y, 0, 1100}, AxesLabel → {"x", "y"},`
`AspectRatio → 0.875]`



Out[2]= - Graphics -

In[3]:= <<Algebra`InequalitySolve`

In[4]:= InequalitySolve[$0.2x + 0.04y \leq 80 \wedge 0.1x + 0.06y \leq 60 \wedge x \geq 0 \wedge y \geq 0$,
{x, y}]

Out[4]= $0 \leq x \leq 400. \&\& y \geq 0 \&\& y \leq 2000. - 5. x \&\& y \leq 1000. - 1.66667 x$

In[5]:=

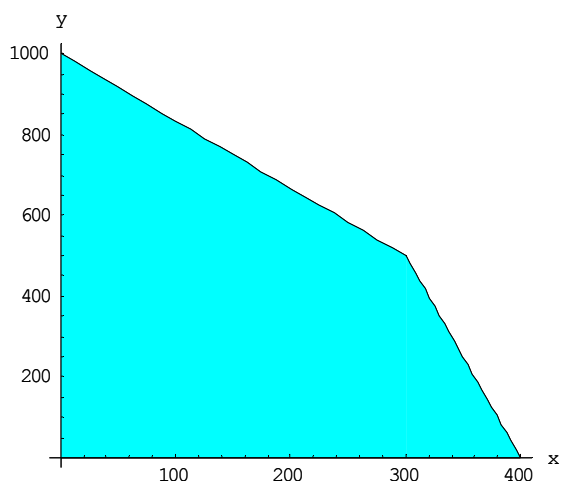
ConstrainedMax[100x+25y, {0.2x+0.04y ≤ 80, 0.1x+0.06y ≤ 60, x ≥ 0, y ≥ 0},
{x, y}]

Out[5]= {42500., {x → 300., y → 500.}}

In[6]:= Clear[sústava, priamka]

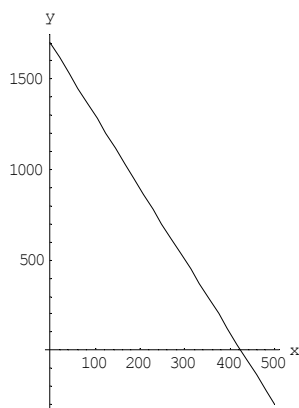
In[7]:=

sústava = InequalityPlot[$0.2x + 0.04y \leq 80 \wedge 0.1x + 0.06y \leq 60 \wedge x \geq 0 \wedge y \geq 0$,
{x, 0, 500}, {y, 0, 1100}, AxesLabel → {"x", "y"}, AspectRatio → 0.875]



Out[7]= - Graphics -

In[8]:= priamka = Plot[$-\frac{100}{25}x + \frac{42500}{25}$, {x, -1, 500}, AxesLabel → {"x", "y"},
AspectRatio → 1.6]

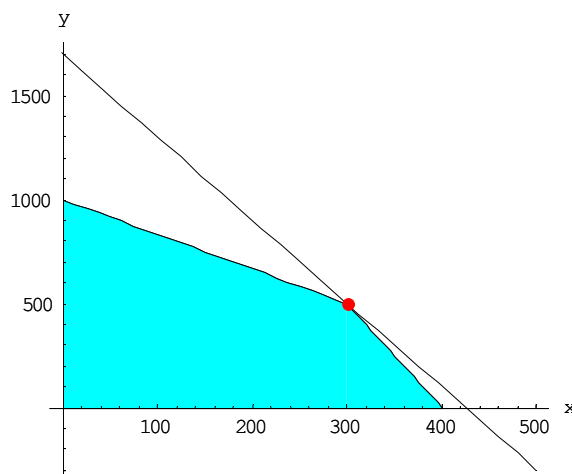


Out[8]= - Graphics -

In[9]:=

```
bod = Graphics[{PointSize[0.025], RGBColor[1, 0, 0], Point[{300, 500}]}];
```

In[10]:= Show[sústava, priamka, bod]



Out[10]= - Graphics -

Záver: Pri $x=300$, $y=500$ je $Z_{\max} = 42\,500$. Výrobu teda organizovať tak, aby vyrobili 300 stolov a 500 nočných stolíkov. Využijú sa pritom racionálne zásoby dreva a dosiahne sa maximálny zisk 42 500,- Sk.

Zadanie 2: Na farme TOPMLIEKO krmia kravičky dvoma druhmi krmív:

senom a silážou. Aby kravičky dávali kvalitné mlieko, sleduje sa splnenie určitých výživových noriem v dennej krmnej dávke: mala by obsahovať aspoň 1900 gramov bielkovín, aspoň 180 g vápnika a vitamínu C aspoň 5 gramov. Obsah jednotlivých výživných látok v používaných krmivách a ich ceny sú uvedené v nasledujúcej tabuľke.

	bielkoviny (g/kg)	vápnik (g/kg)	vitamín C (g/kg)	CENA (Sk/kg)
seno	50	10	50	1
siláž	70	6	100	2

Aké množstvá jednotlivých krmív majú dať do dennej krmnej dávky, ak ju chcú zostaviť tak, aby bola čo najlacnejšia?

Riešenie:

Označme: x množstvo sena (v kg)

y množstvo siláže (v kg)

Údaje o jednotlivých krmivách, výživných látkach a cenách môžeme zapísať do tabuľky:

	bielkoviny (g/kg)	vápnik (g/kg)	vitamín C (g/kg)	CENA (Sk/kg)
sena	50	10	50	1
siláž	70	6	100	2
výživové normy	1900	180	5	

Matematické vyjadrenie podmienok úlohy:

$$50x + 70y \geq 1900$$

$$10x + 6y \geq 180$$

$$50x + 100y \geq 5$$

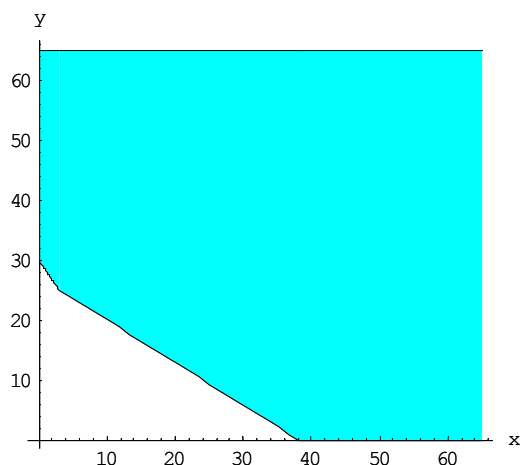
$$x \geq 0$$

$$y \geq 0$$

Ak denná krmná dávka obsahuje x kg sena a y kg siláže, za toto množstvo farma zaplatí $1x + 2y$ Sk, teda účelovú funkciu $Z = x + 2y$ treba minimalizovať.

In[11]:==<<Graphics`InequalityGraphics`

In[12]:== `InequalityPlot[50 x + 70 y ≥ 1900 ∧ 10 x + 6 y ≥ 180 ∧ 5 x + 100 y ≥ 5 ∧
x > 0 ∧ y > 0 , {x, 0, 65}, {y, 0, 65} , AxesLabel → {"x", "y"},
AspectRatio → 0.875]`



Out[12]= - Graphics -

In[13]:= <<Algebra`InequalitySolve`

In[14]:= **InequalitySolve**[$50x + 70y \geq 1900 \wedge 10x + 6y \geq 180 \wedge 5x + 100y \geq 5$
 $\wedge x > 0 \wedge y > 0$, {x, y}]

Out[14]= $0 < x \leq 3 \ \&\& \ y \geq \frac{1}{3} (90 - 5x) \ || \ 3 < x < 38 \ \&\& \ y \geq \frac{1}{7} (190 - 5x) \ || \ x \geq 38 \ \&\& \ y > 0$

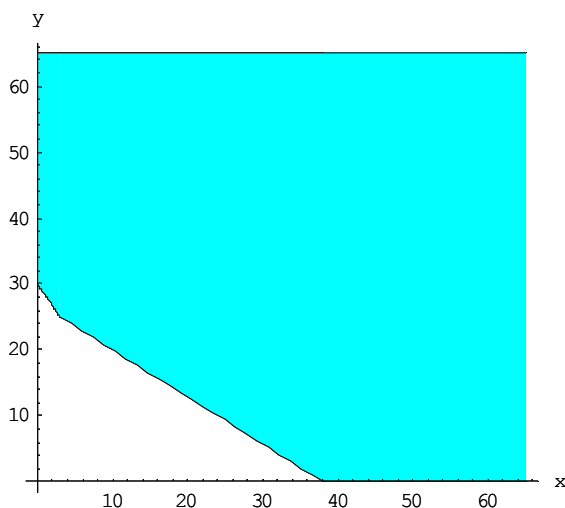
In[15]:= **ConstrainedMin**[$x + 2y$, { $50x + 70y \geq 1900$, $10x + 6y \geq 180$, $5x + 100y \geq 5$,
 $x > 0$, $y > 0$ }, {x, y}]

Out[15]= {38, {x→38, y→0}}

In[16]:= **bod**= **Graphics**[{**PointSize**[0.025], **RGBColor**[1, 0, 0], **Point**[{38, 0}]}];

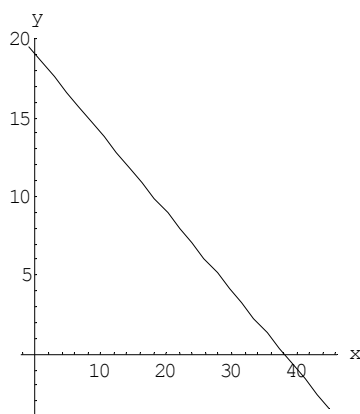
In[17]:= **Clear**[sústava, priamka]

In[18]:= **sústava**=
InequalityPlot[$50x + 70y \geq 1900 \wedge 10x + 6y \geq 180 \wedge 5x + 100y \geq 5$
 $\wedge x > 0 \wedge y > 0$, {x, 0, 65}, {y, 0, 65} , **AxesLabel**→{"x", "y"},
AspectRatio→0.875]



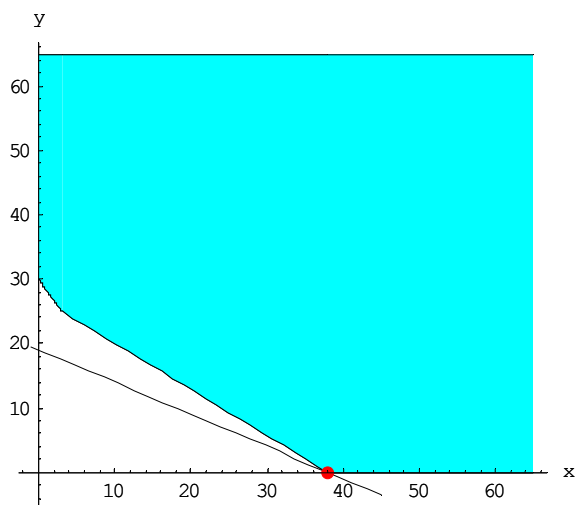
Out[18]= - Graphics -

```
In[19]:= priamka =
Plot[- $\frac{1}{2}x + 19$ , {x, -1, 45}, AxesLabel -> {"x", "y"}, AspectRatio -> 1.2]
```



```
Out[19]= - Graphics -
```

```
In[20]:= Show[sústava, priamka, bod]
```



```
Out[20]= - Graphics -
```

Záver: Farma TOPMLIEKO by mala teda zostavovať dennú kŕmnu dávku z 38 kilogramov sena a 0 kilogramov siláže, aby mala čo najmenšie výdavky, konkrétne 38 Sk.

Zadanie 3: Úlohy na riešenie

- a) Obchodník s uhlím má dva sklady D_1 a D_2 , ktoré uskladňujú 30 ton a 15 ton uhlia. Traja zákazníci C_1 , C_2 , C_3 si podali objednávky na 20, 15, 10 ton uhlia. Vzdialenosť (v km) medzi rôznymi depami a zákazníkmi udáva nasledujúcu tabuľka:

	C_1	C_2	C_3
D_1	7	4	2
D_2	3	2	2

Ak predpokladáme, že cena dopravy za uhlie je rovnaká pre tonu a km, rozhodnite, z ktorých skladov by mali byť objednávky vybavené pri najmenších výdavkoch na dopravu.²³

- b) Výrobca chce maximalizovať zisk pre dva produkty. Prvý produkt poskytuje zisk 1,50 peňažných jednotiek, druhý produkt poskytuje zisk 2,00 peňažných jednotiek. Trhový test a disponibilné zdroje udávajú nasledovné obmedzenia:

- kombinovaná výroba produktov by nemala presahovať 1200 jednotiek za mesiac
- požiadavka na druhý produkt je menšia alebo rovnaká ako polovica požiadavky na prvý produkt
- výroba prvého produktu je menšia alebo sa rovná 600 jednotkám plus trojnásobok druhého produktu.²⁴

Využitie vo výučbe matematiky SŠ: lineárna optimalizácia, v predmete matematické metódy – otvorená hodina: december 2003

Zdrojový súbor na CD-R: [Praktikum-07.nb](#)

²³ Por. KRIŽALKOVIČ K., CUNINKA A., ŠEDIVÝ O., *Riešené úlohy na nerovnice*, ALFA Bratislava 1972, s. 262.

²⁴ Por. LARSON R. E., EDWARDS B. H., *Finite Mathematics*, LEXINGTON Toronto 1991, s. 152.